Esercizio

Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali della funzione

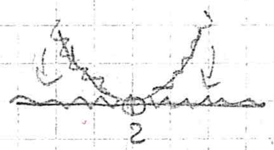
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1}$$

Soluzione

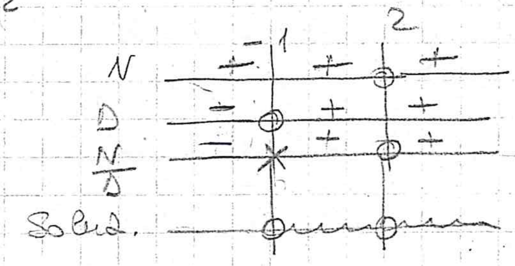
• Dominio $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x+1} > 0 \\ \cancel{x+1 \neq 0} \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{x^2-4x+4}{x+1} > 0$

$N>0 \quad x^2-4x+4>0$ uso la parabola $\cup$

$$x^2-4x+4=0 \qquad x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$



$D>0 \quad x+1>0 \quad x>-1$



Dominio: $-1<x<2 \ \vee \ x>2$

(oppure $x>-1 \ \wedge \ x \neq 2$)

• cerco gli asintoti orizzontali

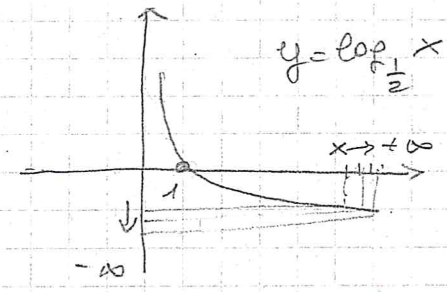
$$\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x =$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}(+\infty) = -\infty$$

quindi non ha asintoti orizzontali

$\cancel{\lim_{x\to-\infty}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1}$

non ha senso per il dominio



Cerco gli asintoti <u>verticali</u>

$$\lim_{x\to -1^+} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \log_{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^2-4(-1)+4}{(-1)+1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1^+ \\ -0,9}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{9}{0^+} =$$

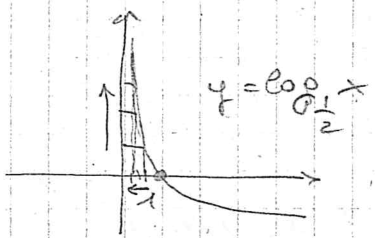
$$-0,9+1=0^+$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}(+\infty) = -\infty \implies x=-1$$ è asintoto verticale

$$\lim_{x\to 2^-} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{(2)^2-4(2)+4}{2+1}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \frac{4-8+4}{3}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 0^+ = +\infty$$



quindi $x=2$ è asintoto verticale

Non ho bisogno di calcolare anche $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ perché ho già potuto concludere che $x=2$ è asintoto verticale

NB $\cancel{\lim_{x\to -1^-}}$ $f(x)$ non ha senso per il dominio

B5 Data la funzione $f(x) = \log_2 \frac{1-x^2}{2x}$

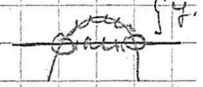
calcola il dominio e gli eventuali asintoti verticali o orizzontali

[Variante $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{1-x^2}$]

<u>Soluzione</u>

dominio $\begin{cases} \frac{1-x^2}{2x} > 0 \\ \cancel{2x \neq 0} \end{cases} \Rightarrow \frac{1-x^2}{2x} > 0$ $\quad N>0 \quad 1-x^2>0$ parabola ∩

$1-x^2=0$
$-x^2=-1$
$x^2=1$
$x=\pm 1$



D: $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} > \frac{0}{2} \quad x>0$

		-1		0		1	
N	$-$	o	$+$		$+$	o	$-$
D	$-$		$-$	o	$+$		$+$
N/D	$+$	o	$-$	o	$+$	o	$-$

Dominio: $x<-1 \vee 0<x<1$
$]-\infty; -1[\cup]0; 1[$

Cerco gli <u>asintoti verticali</u>

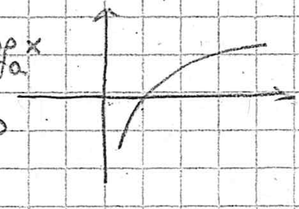
$\lim_{x\to -1^-} \log_2 \frac{1-x^2}{2x} = \lim_{x\to -1^-} \log_2 \frac{0^-}{-2} = \lim_{x\to -1^-} \log_2 0^+ = -\infty \Rightarrow x=-1$ è asintoto verticale

$\cancel{\lim_{x\to -1^+}}$ non ha senso per il dominio

$\lim_{x\to 0^+} \log_2 \frac{1-x^2}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \log_2 \frac{1}{0^+} = \lim_{x\to 0^+} \log(+\infty)$

$= +\infty$

$\Rightarrow x=0$ è asintoto verticale



$y=\log_a x$ con $a>0$

$\cancel{\lim_{x\to 0^-}}$

$\lim_{x\to 1^-} \log_2 \frac{1-x^2}{2x} = \lim_{x\to 1^-} \log_2 \frac{0^+}{2} = \lim_{x\to 1^-} \log_2 0^+ = -\infty$

$\Rightarrow x=1$ è asintoto verticale

Cerco gli <u>asintoti orizzontali</u>

$\lim_{x\to -\infty} \log_2 \frac{1-x^2}{2x} = \lim_{x\to -\infty} \log_2 \frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to -\infty} \log_2 -(-\infty) =$

$= \lim_{x\to -\infty} \log_2 (+\infty) = +\infty$

$\Rightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali

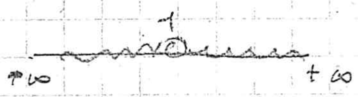
Esercizio

Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali della funzione:

$$f(x) = 2^{\frac{x^2}{1-x}}$$

Soluzione

$f(x) = 2^{\frac{x^2}{1-x}}$ $\quad D_f: \ 1-x \neq 0 \quad -x \neq -1 \quad x \neq 1$

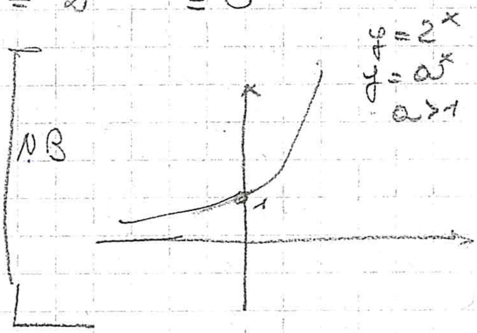


Cerco gli asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{x^2}{1-x}} = \lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{x^{\cancel{2}}}{-\cancel{x}}} = \lim_{x\to+\infty} 2^{-x} = 2^{-\infty} = 0$$

quindi $y=0$ è asintoto orizzontale a dx

NB



$$\lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{x^2}{1-x}} = \lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{x^{\cancel{2}}}{-\cancel{x}}} = \lim_{x\to-\infty} 2^{-x}$$

$$= 2^{-(-\infty)} = 2^{+\infty} = +\infty$$

qui non c'è asintoto orizzontale a sx

Cerco gli asintoti verticali

$$\lim_{x\to1^+} 2^{\frac{x^2}{1-x}} = 2^{\frac{1}{1-1}} = 2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0$$

qui non c'è asintoto verticale

$1,1 \qquad 1-1,1 = -0,1 = 0^-$

$$\lim_{x\to1^-} 2^{\frac{x^2}{1-x}} = 2^{\frac{1}{1-1}} = 2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty$$

quindi $x=1$ è asintoto verticale

$0,9 \qquad 1-0,9 = 0,1 = 0^+$

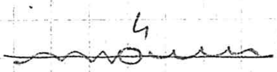
Esercizio

Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-4}}$$

Soluzione

- Dominio: $x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$



- Cerco gli asintoti orizzontali

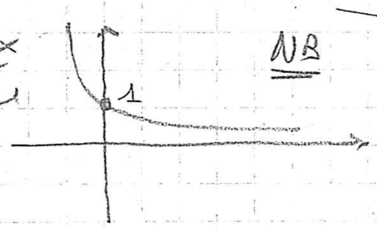
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-4}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

quindi $y=0$ è As. orizzontale

NB

$y = a^x$

$0 < a < 1$



$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-4}} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty$$

qui non c'è asintoto orizzontale

- Cerco gli asintoti verticali

$$\lim_{x\to4^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4^2+1}{4-4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17}{0^+}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

qui non c'è asintoto verticale

$$\lim_{x\to4^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4^2+1}{4-4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17}{0^-}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty$$

quindi $x=4$ è asintoto verticale